Thème : Description d'un mouvement.
Cours 11 : Modélisation l'écoulement d'un fluide.
(version professeur)

B.O. Modéliser l'écoulement d'un fluide
Poussée d'Archimède.
Écoulement d'un fluide en régime permanent.
Débit volumique d'un fluide incompressible. Relation de Bernoulli. Effet Venturi.

I. Poussée d'Archimède.

1. Enoncé.

Tout corps plongé dans un fluide reçoit de la part de ce fluide une force (poussée) verticale, vers le haut dont l'intensité est égale au poids du volume de fluide déplacé (ce volume est donc égal au volume immergé du corps).

Vidéo 1 : La poussée d'Archimède dans la semoule. https://www.youtube.com/watch?v=KS5xQwaAKSc (Université de Lille I)
Vidéo 2 : Pourquoi un bateau flotte ? https://www.youtube.com/watch?v=wrV09tdQf70. (Université de Lille I)

Expression vectorielle : $\vec{P}_A = -\rho_{fluide} \cdot V_{immergé} \cdot \vec{g}$
La norme de la poussée d'Archimède est égale à $P_A = \rho_{fluide}.V_{imm}.g$. Elle s'exprime en Newton.
ρ_{fluide} est la masse volumique du fluide déplacé. Elle s'exprime en kg.m^{-3}. $\rho = \frac{m}{V}$
V_{imm} est le volume du corps immergé. Il s'exprime en m^3
g est l'intensité de la pesanteur. Elle s'exprime en m.s^{-2}

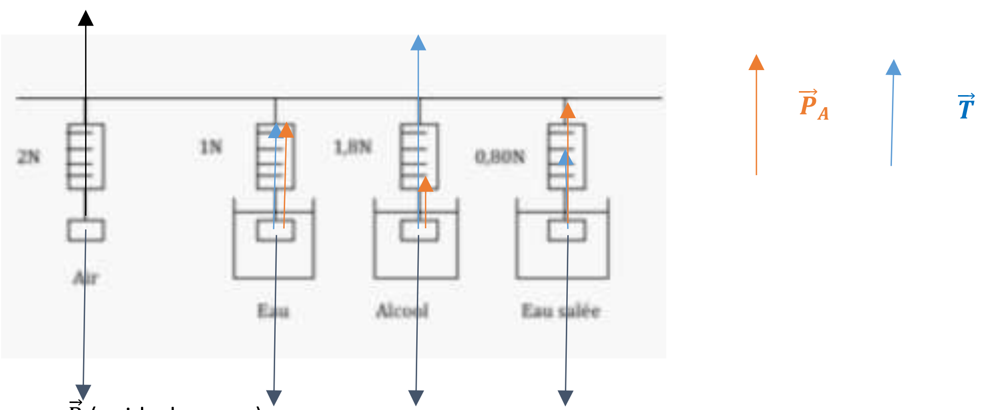
<u>Question</u> : Montrer par une analyse dimensionnelle que la poussée d'Archimède a bien la dimension d'une force.

<u>Réponse</u> :
La dimension d'une force ($F = m.a_G$) est $M.L.T^{-2}$
Une force s'exprime donc en kg.m.s^{-2}, c'est-à-dire en Newton.

La dimension de $\rho_{fluide}.V_{imm}.g$ est $\frac{M}{L^3} \cdot L^3 \cdot L \cdot T^{-2}$ soit $M.L.T^{-2}$
L'équation est homogène, la poussée d'Archimède a bien la dimension d'une force.

<u>Question</u> : Représenter les forces $\vec{T}$, $\vec{P}$ et $\vec{P}_A$ s'exerçant sur le solide à l'équilibre dans les différents cas de figures suivantes :
On considèrera que la poussée d'Archimède dans l'air est négligeable par rapport au poids du corps.

$\vec{T}$ (tension du ressort)



$\vec{P}$ (poids du corps)

Le solide étant immobile, la somme des forces s'exerçant sur le solide est nulle.
<u>Question</u> : Quel liquide est le moins dense ? Justifier votre réponse.
<u>Réponse</u> : L'alcool est le liquide le moins dense, car la poussée d'Archimède qu'il exerce sur le solide est la plus faible.

II. Ecoulement d'un fluide en régime permanent. Débit volumique d'un fluide incompressible.

http://www4.ac-nancy-metz.fr/physique/ancien_site/PHYS/Term/Mecaflu/Poly-mecaflu.htm

1. Définition d'un fluide.

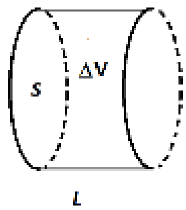
   Un **fluide** peut être considéré comme étant formé d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres. Un fluide est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler. Parmi les fluides, on fait souvent la distinction entre liquides (incompressibles) et gaz (compressibles).

2. Définition du débit volumique.

   Le **débit** est le quotient de la quantité de fluide qui traverse une section droite de la conduite par la durée de cet écoulement.
   Si *V* est le volume de fluide qui a traversé une section droite de la conduite pendant le temps Δt, par définition le débit volumique est : unité : $m^3 \cdot s^{-1}$.

$$\boldsymbol{q = \frac{V}{\Delta t}}$$

De plus, on peut considérer que le fluide parcourt dans un tube, une distance *L* sur une section *S*.



Le volume ΔV a pour expression $\Delta V = L.S$
Le débit volumique peut alors s'écrire : $\boldsymbol{q = \frac{L \cdot S}{\Delta t}}$
La vitesse du fluide étant égale à $v = \frac{L}{\Delta t}$
On obtient une expression du débit qui sera très utile pour la suite des analyses :

$$\boldsymbol{q = v \cdot S}$$

Question :
De l'eau s'écoule dans une conduite de 30,0 cm de diamètre à la vitesse de 0,50 $m.s^{-1}$.
Calculer le débit volumique en $m^3 .s^{-1}$

Réponse :
$\boldsymbol{q = v \cdot S}$
$S = \frac{\pi \times D^2}{4}$
$q = 0{,}50 \times \frac{\pi \times 0{,}30^2}{4}$
$q = 0{,}035$ $m^3.s^{-1}$

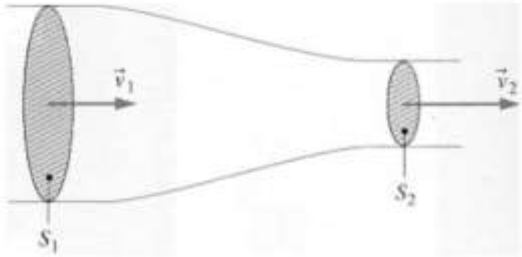
3. Définition d'un régime permanent.

   Un régime d'écoulement est dit ***permanent*** ou ***stationnaire*** si les paramètres qui le caractérisent (pression, température, vitesse, masse volumique, ...), ont une valeur constante au cours du temps.

4. **Equation de continuité** ou équation de conservation.

   Dans le cas d'un **écoulement isovolume** (*V* = Cte) : En régime permanent, le débit-volume est le même à travers toutes les sections droites d'un même tube de courant.

$$\boldsymbol{q_1 = q_2}$$



Si le fluide s'écoule avec la vitesse $\overrightarrow{v_1}$ à travers une section S_1 et avec une vitesse $\overrightarrow{v_2}$ à travers une section S_2,
L'équation de continuité des débits s'écrit : $\boldsymbol{v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2}$
Cette équation permet par exemple, de déterminer la vitesse v_2 d'un fluide dans une section s'il l'on connait v_1, S_1 et S_2

III. Relation de Bernoulli. Effet Venturi.

1. Observations de la relation de Bernoulli.

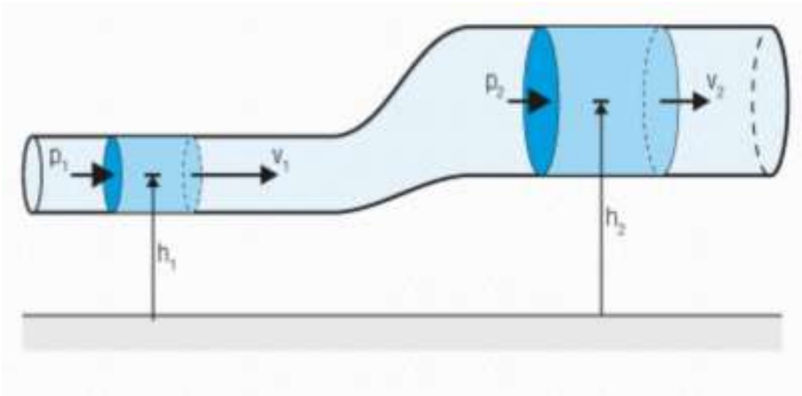
Vidéo 1 : balle de ping pong dans un entonnoir : https://www.youtube.com/watch?v=cOd_lkFqP_w (Université de Lille I)
Vidéo 2 : balle de ping pong en léviatation : https://www.youtube.com/watch?v=WWHXTumy4RQ (Université de Lille I)

La pression d'un fluide diminue lorsque sa vitesse augmente.
Nous allons montrer dans ce cours comment analyser théoriquement ce phénomène.

1.1. Théorème de Bernoulli pour un écoulement permanent d'un fluide parfait incompressible.

Un fluide parfait est un fluide dont l'écoulement se fait sans frottement.

On considère un écoulement permanent d'un fluide parfait, entre les sections S_1 et S_2, entre lesquelles il n'y a aucune machine hydraulique, (pas de pompe, ni de turbine).
Soit *m* la masse et *V* le volume du fluide qui passe à travers la section S_1 entre les instants t et t+Δt. Pendant ce temps la même masse et le même volume de fluide passe à travers la section S_2. Tout se passe comme si ce fluide était passé de la position (1) à la position (2).



En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à ce fluide entre les instants t et t+Δt (la variation d'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces extérieures : poids et forces pressantes), on obtient la relation de Bernoulli :

$$\boldsymbol{p + \rho \cdot \frac{v^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z = Constante}$$

Dans le cas de la figure ci-dessus, l'équation de Bernoulli s'écrit :

$$\boldsymbol{p_1 + \rho \cdot \frac{v_1^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_1 = p_2 + \rho \cdot \frac{v_2^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_2}$$

Une pression s'exprime en Pascal (Pa) qui correspond en unités de base à $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$

<u>Question :</u> : Montrer que chaque terme à la dimension d'une pression.

<u>Réponse</u> :

La dimension de $\rho \cdot \frac{v^2}{2}$ est $M.L^{-3}.L^2.T^{-2}$ soit $M.L^{-1}.T^2$ — $\rho \cdot \frac{v^2}{2}$ correspond à la pression cinétique

La dimension de $\rho \cdot g \cdot z$ est $\frac{M}{L^3} \cdot L^3 \cdot L \cdot T^{-2}$ soit $M.L.T^{-2}$ — $\rho \cdot g \cdot z$ correspond à la pression de pesanteur.

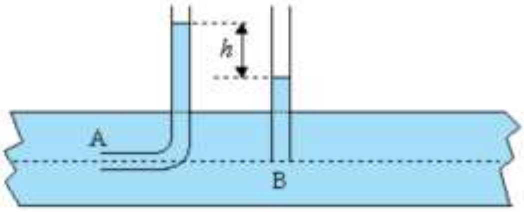
p correspond à la pression du fluide sur la section *S.*

1.2. Applications de la relation de Bernoulli.

Vidéo 1 : Bernoulli https://www.youtube.com/watch?v=E32YHDTDy-4 (Université Lille I) Durée (de 0 à 5min 14 s)

<u>1.2.1 Comment déterminer la vitesse d'écoulement d'un fluide à l'aide d'un tube de Pitot</u>

On considère un fluide en écoulement permanent dans une canalisation et deux tubes plongeant dans ce fluide, l'un débouchant en A face au courant, et l'autre en B est le long des lignes de courant, les deux extrémités sont à la même hauteur.



- Les points A et B sont à la même cote : $z_A = z_B$
- Au point B, le liquide a la même vitesse *v* que dans la canalisation et la pression est notée p_B.
- En A la vitesse est nulle et la pression est notée p_A. En effet, **le fluide en équilibre dans le tube A, est immobile.**

Application du théorème de Bernoulli :

$$\boldsymbol{p_A + \rho \cdot \frac{v_A^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z_A = p_B + \rho \cdot \frac{v_B^2}{2} + \rho \cdot g \cdot z_B}$$

Comme les deux hauteurs h_1 et h_2 sont les mêmes, cette équation se simplifie :

$$\boldsymbol{p_A + \rho \cdot \frac{v_A^2}{2} = p_B + \rho \cdot \frac{v_B^2}{2}}$$

De plus, la vitesse en A est nulle alors on peut écrire :

$$\boldsymbol{p_A = p_B + \rho \cdot \frac{v_B^2}{2}}$$

Connaissant les pressions $\boldsymbol{p_A}$et $\boldsymbol{p_B}$ et la masse volumique du fluide, on peut déterminer la vitesse du fluide en B.

$$\boldsymbol{v_B = \sqrt{\frac{2(p_A - p_B)}{\rho}}}$$

Si nous ne disposons pas d'instruments de mesure de la pression en A et B, on peut utiliser la loi fondamentale de la statique des fluides (vue en première) : $\boldsymbol{p_A - p_B = \rho \cdot g \cdot h}$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{p_A = p_B + \rho \cdot \frac{v_B^2}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{p_A - p_B = \rho \cdot \frac{v_B^2}{2}}$$

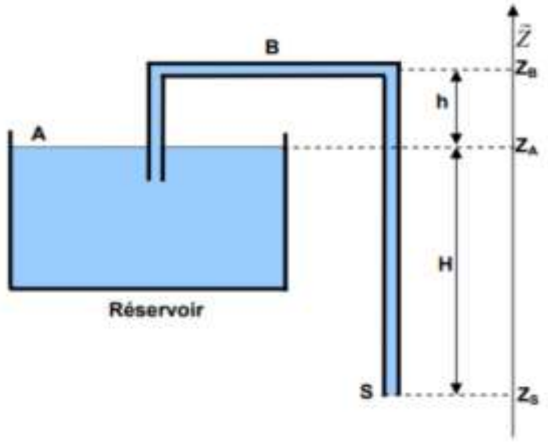
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\rho \cdot g \cdot (z_A - z_B) \ = \rho \cdot \frac{v_B^2}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\rho \cdot g \cdot h = \rho \cdot \frac{v_B^2}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{v_B} = \sqrt{\frac{2\rho \cdot g \cdot h}{\rho}}$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{v_B} = \sqrt{\boldsymbol{2g \cdot h}}$$ (Formule de Torricelli)

Question :



Un grand réservoir d'eau est équipé d'un tube fin en U comme indiqué sur la figure ci-contre.

La pression atmosphérique est identique en A et en S.
La hauteur *H* est égale à *H* = 2,45 m.
La hauteur *h* est égale à *h* = 0,65 m.
Le diamètre du tube en S est égale à *d* = 1,00 cm
L'intensité de la pesanteur est *g* = 10,0 m.s^{-2}

Question préliminaire : Dans ce cas de figure, on considère que la vitesse de l'eau en A, v_A est nulle. Justifier cette hypothèse.

1. Ecrire l'équation de Bernoulli entre les points A et S et en déduire la vitesse v_S de l'eau qui sort en S.
2. Calculer le débit volumique au point S.

Réponse :

1) $\frac{1}{2}\rho V_A^2 + \rho g z_A + P_A = \frac{1}{2}\rho V_S^2 + \rho g z_S + P_S$

Or $P_S = P_A = P_{atm}$

$V_A=0$ (Car le niveau du fluide dans le réservoir varie lentement)

Donc $V_S = \sqrt{2g(z_A - Z_S)}$

$V_S = \sqrt{2gH}$

$V_S = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 2{,}45}$

$V_S = 6{,}93$ m.s^{-1}

2. Le débit volumique est $q_V = V_S \cdot S = V_S \cdot \frac{\pi d^2}{4}$

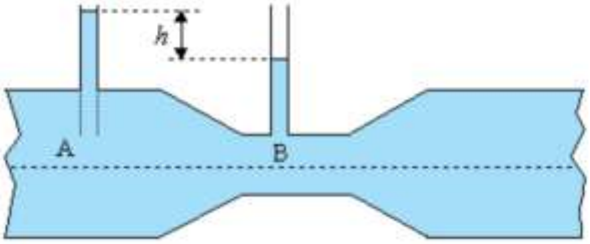
$q_V = 6{,}93 \times \frac{\pi \times (1{,}0 \times 10^{-2})^2}{4}$

$q_V = 5{,}44 \times 10^{-4}$ m^3.s^{-1}

$q_V = 5{,}44 \times 10^{-1}$ L.s^{-1}

1.2.2. Effet Venturi - Comment déterminer le débit volumique d'un fluide ?

Le schéma ci-dessous représente la coupe d'une canalisation. Un conduit de section principale S_A subit un étranglement en B où sa section est S_B.



Les points A et B sont à la même cote : $z_A = z_B$

Le théorème de Bernoulli s'écrit :

$$\boldsymbol{p_A + \rho \cdot \frac{v_A^2}{2} = p_B + \rho \cdot \frac{v_B^2}{2}}$$

Diminution de la pression dans l'étranglement en B
D'après l'équation de continuité, le débit est constant alors $\boldsymbol{v_A \cdot S_A = v_B \cdot S_B}$ donc $\boldsymbol{\frac{v_B}{v_A} = \frac{S_A}{S_B}}$
Puisque $\boldsymbol{S_A > S_B}$ alors $\boldsymbol{v_B > v_A}$

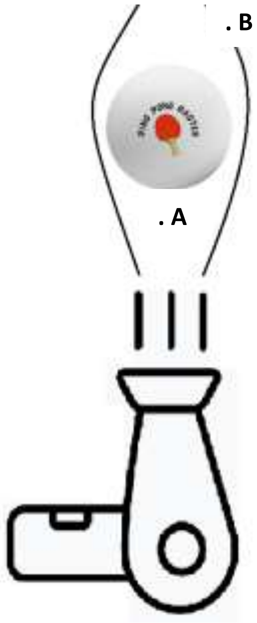
Question : Montrer que la pression $\boldsymbol{p_A > p_B}$

$$\boldsymbol{p_A + \rho \cdot \frac{v_A^2}{2} = p_B + \rho \cdot \frac{v_B^2}{2}}$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{p_A}{p_B} = \frac{\rho \cdot \frac{v_B^2}{2}}{\rho \cdot \frac{v_A^2}{2}}}$$
$$\Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{p_A}{p_B} = \frac{v_B^2}{v_A^2}}$$

Puisque $\boldsymbol{v_B > v_A}$ alors $\boldsymbol{p_A > p_B}$

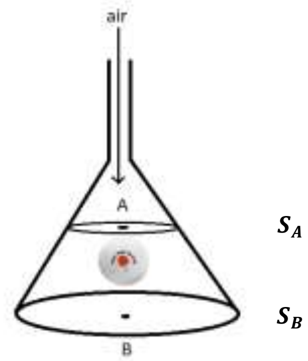
Retour sur certaines vidéos

Vidéo de la balle de ping-pong en lévitation dans le flux d'air d'un sèche cheveu.



1. Représenter le flux d'air autour de la balle de ping-pong.
2. La distance parcourue par le flux d'air autour de la balle de ping-pong est plus grande. Comme le débit volumique est constant, la vitesse $\boldsymbol{v_A} < \boldsymbol{v_B}$
   comparer sa vitesse $\boldsymbol{v_A}$ en A et $\boldsymbol{v_B}$ en B.
3. Si $\boldsymbol{v_A} < \boldsymbol{v_B}$ $a$lors $\boldsymbol{p_A} > \boldsymbol{p_B}$
4. La pression en A étant plus élevée qu'en B (dépression en B), la balle reste en suspension.

Vidéo de la balle de ping-pong dans l'entonnoir retourné dans lequel l'expérimentateur souffle.



1. On a $\boldsymbol{v_A} \cdot \boldsymbol{S_A} = \boldsymbol{v_B} \cdot \boldsymbol{S_B}$ donc $\frac{v_B}{v_A} = \frac{S_A}{S_B}$
   Si $\boldsymbol{S_A} < \boldsymbol{S_B}$ alors $\boldsymbol{v_A} > \boldsymbol{v_B}$
2. Comparer alors les pressions $\boldsymbol{p_A}$ et $\boldsymbol{p_B}$
3. Si $\boldsymbol{v_A} > \boldsymbol{v_B}$ $a$lors $\boldsymbol{p_A} < \boldsymbol{p_B}$
4. La pression en B étant plus élevée qu'en A (dépression en A), la balle reste en suspension.